

2.8.5 Lineární nerovnice s parametrem

Předpoklady: 2208, 2802

Pedagogická poznámka: Pokud v tom necháte studenty vykoupat (což je, zdá se, jediné rozumné řešení), zabere tato látka tak jednu a půl vyučovací hodiny (první hodinu příklady 1.- 4, polovinu druhé příklady 5. a 6.).
Při samostatné práci studentů si určitě všimnete, že naprostá většina problémů pramení ze špatné orientace, neuplatňování základních pravidel a nepozornosti. Nic z toho jim výklad u tabule nemůže poskytnout.

Jak řešíme lineární nerovnice?

Podobné kroky jako u řešení lineárních rovnic:

- všechno s neznámou na jednu stranu, všechno bez neznámé na druhou,
- vlevo vytkneme x před závorkou,
- vydělíme (pokud závorka není nulová) nerovnici závorkou (a pokud je závorka záporná, otočíme znaménko nerovnosti).

V čem je řešení nerovnic podobné řešení rovnic?

- Nesmíme vydělit nerovnici nulou.

V čem je řešení nerovnic jiné než řešení rovnic?

- Pokud dělíme záporným číslem, musíme obrátit znaménko.

Jaký mají předchozí úvahy dopad pro řešení lineárních nerovnic s parametrem?

⇒ **Při dělení výrazem, který obsahuje parametr, musíme rozlišovat u hodnot výrazu nulu, kladnou hodnotu a zápornou hodnotu** ⇒ typicky budeme větvit do tří větví.

Pedagogická poznámka: Úvodní přehled sestavíme společně se studenty s tím, že v něm je obsaženo vše potřebné ke správnému vyřešení úloh této hodiny.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2x + b > 0$ s neznámou x a parametrem b .

$$2x + b > 0 \quad / -b \quad \text{odečíst } b \text{ můžeme vždy}$$

$$2x > -b \quad / : 2$$

$$x > -\frac{b}{2} \quad K = \left(-\frac{b}{2}; \infty \right)$$

Hodnoty parametru b :

$$b \in R$$

Řešení pro x :

$$K = \left(-\frac{b}{2}; \infty \right)$$

Pedagogická poznámka: Skutečnost, že závěrečný přehled obsahuje pouze jediný řádek, činí předchozí příklad pro naprostou většinu studentů neřešitelným. Jediný řádek se jim zdá příliš málo (všechny ostatní příklady jich přece mají víc a ještě jsme očekávali, že se větvení zesložití) a tak závěrečný přehled většinou nenapíší.

Př. 2: Vyřeš nerovnici $ax - 2 > 0$ s neznámou x a parametrem a .

$$ax - 2 > 0$$

$$ax > 2$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem a , ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli, zda obrátit nebo zachovat nerovnost)

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$, můžeme vydělit nerovnicí, dělíme kladným číslem \Rightarrow zachováváme nerovnost:

$$ax > 2 \quad / : a$$

$$x > \frac{2}{a}$$

$$K = \left(\frac{2}{a}, \infty \right)$$

$a = 0$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$ax > 2$$

$$0x > 2$$

$0 > 2 \Rightarrow$ nevyjde nikdy $\Rightarrow K = \emptyset$

$a < 0$, můžeme vydělit nerovnicí, dělíme záporným číslem \Rightarrow obracíme nerovnost:

$$ax > 2 \quad / : a$$

$$x < \frac{2}{a}$$

$$K = \left(-\infty, \frac{2}{a} \right)$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$a > 0$	$K = \left(\frac{2}{a}, \infty \right)$
$a = 0$	$K = \emptyset$
$a < 0$	$K = \left(-\infty, \frac{2}{a} \right)$

Pedagogická poznámka: Nezanedbatelná část studentů před dělením rozdělí výpočet pouze na dvě větve ($a = 0, a \neq 0$). Ptám se jich, jaký vlastně mělo význam si na začátku hodiny psát, co nás čeká a jak budeme postupovat.

Př. 3: Vyřeš graficky nerovnici $ax - 2 > 0$ s neznámou x a parametrem a .

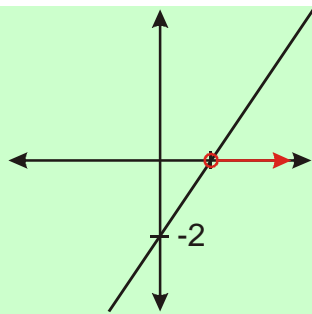
Levá strana – funkce $y = ax - 2$ - přímka (lineární funkce), procházející bodem $[0; -2]$

(hodnota pro $x = 0$ je -2). Směr přímky závisí na hodnotě parametru a .

Pravá strana – 0 – budeme se zajímat, která část grafu levé strany je nad nebo pod osou x

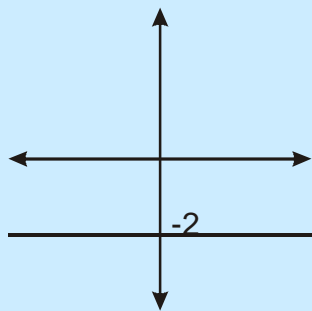
\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$a > 0$, funkce $y = ax - 2$ je rostoucí:



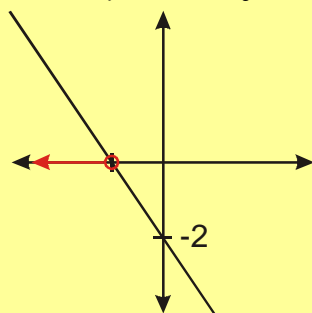
$$\Rightarrow K = \left(\frac{2}{a}, \infty \right)$$

$a = 0$ funkce $y = ax - 2$ je konstantní:



$$\Rightarrow K = \emptyset$$

funkce $y = ax - 2$ je klesající:



$$\Rightarrow K = \left(-\infty, \frac{2}{a} \right)$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$a > 0$	$K = \left(\frac{2}{a}, \infty \right)$
$a = 0$	$K = \emptyset$
$a < 0$	$K = \left(-\infty, \frac{2}{a} \right)$

Pedagogická poznámka: Nakreslit graf první funkce je vzhledem k neurčitosti zadání pro hodně studentů příliš velké sousto. Po menším čekání tak řešíme bod a) společně a samostatně studenti dokreslují až zbytek.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $ax + b \leq 0$ s neznámou x a parametry a, b . Každou větev řešení zkontroluj pomocí grafického řešení.

$$ax + b \leq 0$$

$$ax \leq -b$$

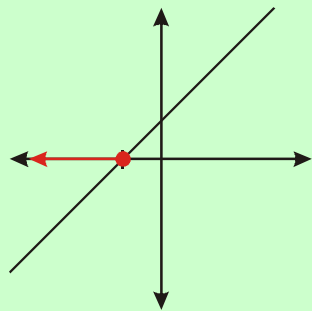
Chceme vydělit rovnici výrazem a , ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli, zda obrátit nebo zachovat nerovnost)

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe).

$a > 0$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme kladným číslem \Rightarrow nerovnost zachováváme:

$$ax \leq -b \quad / : a$$

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad K = \left(-\infty; -\frac{b}{a} \right]$$



$a = 0$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

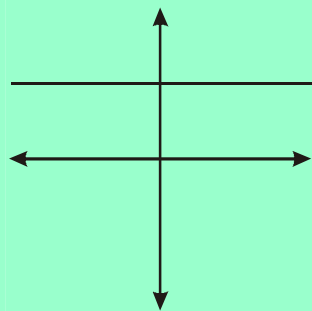
$$ax \leq -b$$

$$0x \leq -b$$

$0 \leq -b \Rightarrow$ záleží na hodnotě $b \Rightarrow$ **opět rozvětvojeme podle hodnoty b**

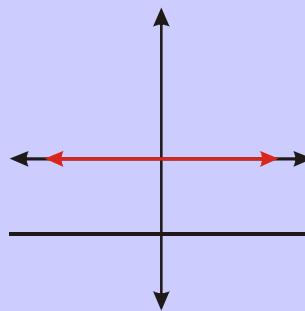
$b > 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow$ získáváme nerovnici

$0 \leq$ záporné číslo $\Rightarrow K = \emptyset$



$b \leq 0 \Rightarrow -b \geq 0 \Rightarrow$ získávám nerovnici

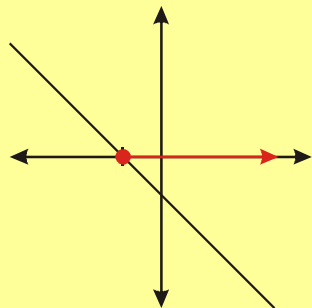
$0 \leq$ nezáporné číslo $\Rightarrow K = R$



$a < 0$, můžeme vydělit nerovnici, dělíme záporným číslem \Rightarrow nerovnost obracíme:

$$ax \leq -b \quad / : a$$

$$x \geq -\frac{b}{a} \quad K = \left[-\frac{b}{a}; \infty \right)$$



Závěrečný přehled:

Hodnoty parametrů a, b :

$$a > 0, b \in R$$

Řešení pro x :

$$K = \left(-\infty; -\frac{b}{a} \right]$$

$a = 0, b \in (0; \infty)$	$K = \emptyset$
$a = 0, b \in (-\infty; 0)$	$K = R$
$a < 0, b \in R$	$K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right\rangle$

Pedagogická poznámka: Téměř všichni selžou u prostřední větve s $a = 0$. Nejčastěji bez nějakého důvodu napíší automaticky $K = \emptyset$, pak po nich chci, aby přestali hádat a začali počítat. Další se pak spletou až na samém konci, kdy si neuvědomí, že podmínka patří k b a my hledáme řešení pro x a tak omezení volby b neznamená omezení volby x .

Poté, co řešení vytvoříme na tabuli, nechávám chvíli času, aby se žáci sami zorientovali a samostatně sepsali závěrečný přehled.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $px - 2 \geq 2x - p$ s neznámou x a parametrem p .

$$px - 2 \geq 2x - p$$

$$px - 2x \geq 2 - p$$

$$x(p - 2) \geq 2 - p$$

Chceme vydělit rovnicí výrazem $(p - 2)$, ale jednak nesmíme dělit nulou a jednak musíme znát znaménko výrazu, kterým dělíme (abychom věděli, zda obrátit nebo zachovat nerovnost).

\Rightarrow Zjistíme, kdy je výraz $(p - 2)$ roven nule: $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe)

$p > 2$, můžeme vydělit nerovnicí, dělíme kladným číslem \Rightarrow nerovnost zachováváme:

$$x(p - 2) \geq 2 - p \quad /:(p - 2)$$

$$x \geq \frac{2 - p}{p - 2}$$

$$x \geq -1 \quad K = \langle -1, \infty \rangle$$

$p = 2$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x(p - 2) \geq 2 - p$$

$$x(2 - 2) \geq 2 - 2$$

$$0x \geq 0$$

$0 \geq 0 \Rightarrow$ vyjde vždy $\Rightarrow K = R$

$p < 2$, můžeme vydělit nerovnicí, dělíme záporným číslem \Rightarrow nerovnost obracíme:

$$x(p - 2) \geq 2 - p \quad /:(p - 2)$$

$$x \leq \frac{2 - p}{p - 2}$$

$$x \leq -1 \quad K = (-\infty, -1)$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

$$p > 2$$

Řešení pro x :

$$K = \langle -1, \infty \rangle$$

$p = 2$	$K = R$
$p < 2$	$K = (-\infty, -1)$

Pedagogická poznámka: Příklad nečiní studentům větší problémy, pouze ti slabší zase automaticky dělí intervaly podle nuly, ne dvojky na $p > 0$, $p = 2$ a $p < 0$, případně do řešení přidávají další řádku pro $p = 0$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-p} \leq 1$ s neznámou x a parametrem p .

$\frac{1}{x-p} \leq 1$ - nerovnice obsahuje zlomek \Rightarrow je třeba podmínka $x-p \neq 0 \Rightarrow x \neq p$ - teď

můžeme násobit výrazem $(x-p)$, může být kladný i záporný \Rightarrow rozdělíme na dvě větve

stejně bychom dělili na dvě větve nerovnici $\frac{1}{x-\sqrt{2}} \leq 1 \Rightarrow$ tohle je dělení výpočtu podle

hodnot x , ne podle hodnot parametru (jiný typ dělení, než jsme u parametrických nerovnic dosud používali) \Rightarrow **tohle dělení se neprojeví v závěrečném přehledu, výsledky z obou větví budeme muset sjednotit**

$x-p < 0 \Rightarrow x < p$ - násobíme záporným číslem \Rightarrow obracíme nerovnost

$$\frac{1}{x-p} \leq 1 \quad / \cdot (x-p)$$

$$1 \geq x-p$$

$1+p \geq x \Rightarrow$ vypadá to na interval

$(-\infty; p+1)$, ale počítáme jen s čísly $x < p$

\Rightarrow

$$K_1 = (-\infty; p)$$

$x-p > 0 \Rightarrow x > p$ - násobíme kladným číslem \Rightarrow zachováváme nerovnost

$$\frac{1}{x-p} \leq 1 \quad / \cdot (x-p)$$

$$1 \leq x-p$$

$1+p \leq x \Rightarrow$ vypadá to na interval $\langle p+1; \infty \rangle$,

počítáme jen s čísly $x > p$ a taková jsou

v intervalu $\langle p+1; \infty \rangle$ všechna \Rightarrow

$$K_2 = \langle 1+p, \infty \rangle$$

Nedělili jsem výpočet podle různých hodnot p , ale rozdělili jsme všechna možná x na dvě části a pro každou část jsme to spočítali \Rightarrow celkový výsledek je sjednocení obou řešení.

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty \rangle$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

$$p \in R$$

Řešení pro x :

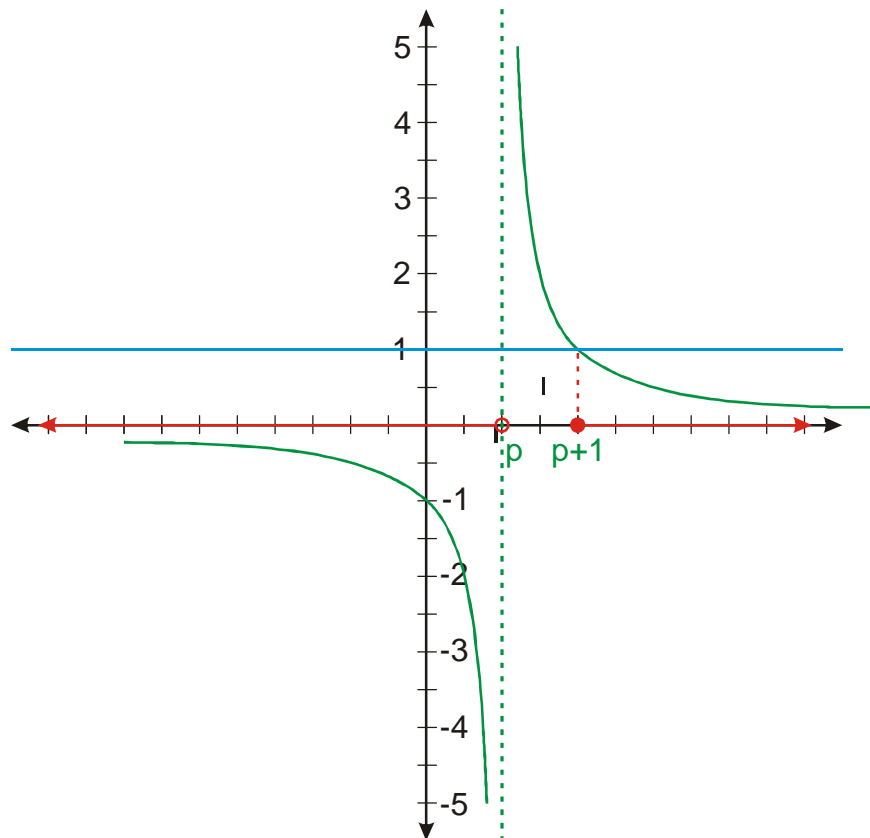
$$K = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty \rangle$$

Pedagogická poznámka: Diskuse o vzniku konečného výsledku sjednocením je důležitá, přesto se objeví studenti, kteří nebudou mít v situaci zcela jasno. Na druhou stranu jde o příklad poměrně extrémní na představitost a je velmi málo pravděpodobné, že by se s ním ještě někdy setkali.

Př. 7: Vyřeš graficky nerovnici $\frac{1}{x-p} \leq 1$ s neznámou x a parametrem p .

Levá strana – funkce $y = \frac{1}{x-p}$ - lineární lomená funkce, posunutá po ose x o p .

Pravá strana – funkce $y = 1$.



$$K = (-\infty, p) \cup \langle p+1, \infty \rangle$$

Pedagogická poznámka: Teprve z grafického řešení někteří studenti pochopí, jak se příklad vlastně měl řešit.

Shrnutí: Při řešení nerovnic s parametrem musíme při dělení s výrazem obsahujícím parametr dávat pozor i na znaménko tohoto výrazu.